Semestrální práce z předmětu X36TIN

akademický rok 2006/2007, letní semestr

cvičící: RNDr. Marko Genyk-Berezovskyj
cvičení: pondělí, 12:45
vypracoval: Jan Pospíšil
dne: 27. května 2007
email: pospij5@fel.cvut.cz

1 Zadání (úloha 11)

Uvažte polynomy jedné proměnné maximálně 5 stupně s celočíselnými koeficienty z intervalu <5, 5>. Každý polynom představuje uzel grafu a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, když příslušné polynomy sdílejí alespoň jeden společný kořen. Zjistěte počet komponent tohoto grafu, a průměr největší z nich.

Poznámka: pro konkretizaci úlohy jsem si zvolil kořeny polynomů jen v množině reálných čísel.

2 Teorie

2.1 Polynom

je funkce $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $P(x)=\sum_{0}^{m} a_i x^i, a_m \neq 0$, kde a_i jsou koeficienty polynomu a m je stupeň polynomu stP (pokud je m nula, je stupeň polynomu definován jako -∞).

2.2 Kořen polynomu

je takové $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $P(x)=0$.

2.3 Neorientovaný graf G

je množina uzlů U, hran H a incidence ρ. Zapisujeme $G=\langle H, U, \rho\rangle$.

2.4 Prostý graf

je graf, ve kterém se nevyskytují rovnoběžné hrany (tzn. různé hrany se stejnými krajními uzly). U prostého grafu nemá smysl incidence, zapisuje se proto $G=\langle H, U\rangle$.

2.5 Sled grafu G s krajními uzly u a v

je libovolná posloupnost uzlů a hran grafu G $S=\langle u_0, h_1, u_1, \ldots, h_n, u_n\rangle$, kde $u = u_0$, $v = u_n$ a pro všechny $i \in \langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle$ platí: $[u_{i-1}, u_i]=h_i \in H$.

2.6 Souvislý graf

je graf, v němž existuje sled mezi libovolnými dvěma uzly.

2.7 Komponenta grafu

je každý maximální souvislý podgraf daného grafu (= souvislý podgraf, který již nelze zvětšit).

2.8 Vzdálenost uzlů u a v

je počet hran v minimálním (nejkratším) sledu s krajními uzly *u* a *v*. Značíme *d*(*u,v*).

2.9 Průměr grafu (komponenty) G

je maximální vzdálenost dvou uzlů daného grafu (komponenty). Značíme $T(G)=max(d(u,v)), \forall u,v \in G$

3 Rozbor úlohy

Polynomy, které se budou v grafu vyskytovat jsou tyto:

- 11 polynomů řádu -∞: P(x) = c
- 110 polynomů řádu 1: P(x) = ax + b
- 1210 polynomů řádu 2: P(x) = $ax^2 + bx + c$
- …
- 1'610'510 polynomů řádu 5: P(x) = $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Celkem tedy 1'771'561 polynomů. Polynomy řádu -∞ jsou tyto:

- P(x) = -5
- P(x) = -4
- …
- P(x) = 5

Počet polynomů ostatních stupňů lze určit podle vzorce $n_p=(n_k-1)n_k^m$, kde n_k je počet všech různých koeficientů (v této úloze 11) a *m* je stupeň polynomů. Tyto polynomy jsou generovány jako lineární kombinace z možných koeficientů (s dodržením podmínky $a_m \neq 0$ - proto se ve vzorci pro výpočet počtu polynomů vyskytuje (n_k-*1*)).

Nyní se budeme věnovat kořenům jednotlivých polynomů. Polynomy stupně -∞ nemají žádné kořeny, kromě polynomu P(x) = 0, který má kořenů nekonečně mnoho, konkrétně celou množinu reálných čísel. Polynomy stupně 1 mají každý jeden kořen a ten je přesně definován vzorcem $-a_0/a_1$. Polynomy stupně *m* (*m* > 1) mají maximálně *m* reálných kořenů. Tyto mohou být určeny například vzorcem pro kvadratickou rovnici, či Cardanovými vzorci. Pro polynomy vyššího stupně než 4 však žádné vzorce neexistují a je třeba je najít numericky.

A jak bude vypadat hledaný graf?

Graf bude prostý, neboť nemá cenu uvažovat hrany spojující stejný polynom sám se sebou. Každý polynom, který má alespoň jeden kořen (i nadále budu uvažovat jen reálné kořeny) je spojen hranou s polynomem P(x) = 0, který, jak jsem uvedl, má kořenů nekonečně mnoho, konkrétně celou množinu reálných čísel. Tím pádem množina všech molynomů, které mají alespoň jeden kořen, tvoří jedinou komponentu. Můžeme určit i průměr této komponenty: je roven 2, neboť z každého libovolného polynomu můžeme najít sled do jiného polynomu nejdéle přes polynom P(x) = 0 (za předpokladu, že kromě tohoto polynomu jsou v komponentě alespoň dva další polynomy s různými kořeny – tuto podmínku nám však zaručuje přítomnost polynomů stupně 1). Každý další polynom, který nemá žádný kořen, tvoří samostatnou komponentu s průměrem 0.

Celkový počet komponent, ze kterého je graf složen, lze tedy vyjádřit jako: $n=p_{bk}+1$, kde p_{bk} je počet polynomů bez kořene. Průměr největší z nich (tj. komponenty skládající se z polynomů majících alespoň jeden kořen) je 2, jak vyplývá z předchozího odstavce.

Pro nalezení celkového počtu komponen je zapotřebí zjistit, kolik ponymomů vytvořených podle zadání nemá ani jeden kořen. Nemusíme uvažovat polynomy lichého řádu P(x), neboť pro ně platí: $\lim_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ a $\lim_{x\to\infty} P(x)=\infty$ a tedy podle [4] musejí mít alespoň jeden kořen.

4 Ilustrace problému

Pro ilustraci nabízím náčrt grafu, který je tvořen z polynomů maximálně 1. stupně s celočíselnými koeficienty z intervalu <-2;2>. Počet komponet takového grafu je roven pěti a průměr největší komponenty je roven dvěma. Jednotlivé komponenty jsou od sebe barevně odlišeny, stejně tak je vyznačena jedna z nejdelších cest grafu. (Obrázek je přiložen jako Příloha 1.)

5 Závěr

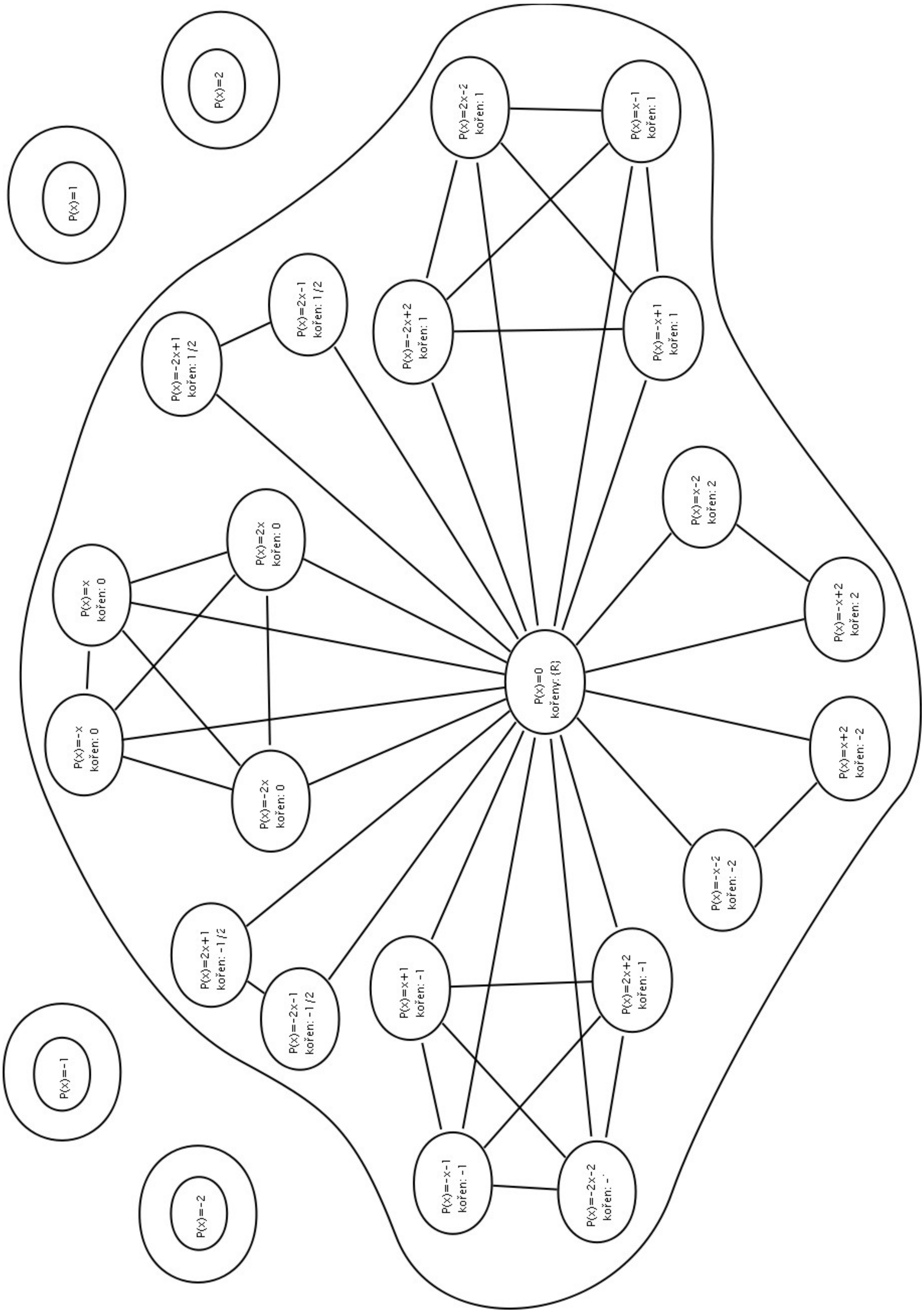
Na vypočet, kolik z daných polynomů nemá kořen, jsem použil program [5], který jsem vytvořil speciálně pro tento účel. Závěr je takový, že polynomů bez kořene je 39'068, tedy <u>celkový počet komponen v zadaném grafu je 39'069</u>. <u>Průměr největší z nich je 2</u>, jak již bylo zmíněno.

6 Zdroje

- [1] materiály k přednáškám X36TIN
- [2] http://veda-technika.blogspot.com/2007/04/hledn-koen-polynomu.html
- [3] http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/nr/node7.html
- [4] Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné, Tkadlec Josef, ČVUT 2004: věta O mezihodnotě (4.58) a její první důsledek (4.59-a)
- [5] http://www.vpp-net.com/fel/tin/polynomy

(všechny internetové zdroje byly prohlíženy odpoledne 27. května 2007)

Příloha 1


P(x)=2
P(x)=1
P(x)=2x-2 kořen: 1
P(x)=x-1 kořen: 1
P(x)=-2x+1 kořen: 1/2
P(x)=2x-1 kořen: 1/2
P(x)=-2x+2 kořen: 1
P(x)=-x+1 kořen: 1
P(x)=x-2 kořen: 2
P(x)=x kořen: 0
P(x)=2x kořen: 0
P(x)=-x+2 kořen: 2
P(x)=0 kořeny: {R}
P(x)=-x kořen: 0
P(x)=-2x kořen: 0
P(x)=x+2 kořen: -2
P(x)=-x-2 kořen: -2
P(x)=2x+1 kořen: -1/2
P(x)=-2x-1 kořen: -1/2
P(x)=x+1 kořen: -1
P(x)=2x+2 kořen: -1
P(x)=-1
P(x)=-x-1 kořen: -1
P(x)=-2x-2 kořen: -
P(x)=-2